VARIABILI, GRAFICI E FUNZIONI

1. Introduzione

Quando parliamo di argomenti che hanno una dimensione quantificabile

(cosa che succede spesso in economia e in molte altre discipline, scientifiche e non solo)

è utile descrivere certi “accadimenti” attraverso relazioni formali (logiche o matematiche) oppure grafiche.

Alcuni esempi, in ordine di crescente difficoltà di rappresentazione:

Come rappresentare, graficamente o funzionalmente, queste relazioni?

A. "Chi guadagna di più risparmia di più".

B. "L'altezza media della nostra popolazione è cresciuta nel tempo: abbiamo guadagnato 20 centimetri in un secolo".

C. "Ogni anno, da fine dicembre a fine giugno, le giornate si allungano; poi tornano ad accorciarsi".

D. "Al crescere della temperatura, i ghiacciai si sciolgono".

Cosa hanno in comune queste affermazioni?

- Due “**variabili**”!

In molti casi sappiamo o possiamo supporre che sia una delle due a “**causare**” l’altra.

Ma non sempre. Prendiamo ad esempio l’ultima:

- “Al crescere della temperatura, il ghiaccio si scioglie”.

E’ chiaro, per come l’ho scritta, che nella mia intenzione è la temperatura a **causare** lo scioglimento.

Però potrei anche formulare una relazione opposta tra le due variabili:

- All’aumentare della quantità di ghiaccio nella stanza, la temperatura scende.

Una cosa importante: queste due affermazioni, possono essere contemporaneamente vere. Ad esempio:

- “Al crescere della temperatura, il ghiaccio si scioglie. E mentre la quantità di ghiaccio nella stanza diminuisce, la temperatura sale ancora di più”.

Questo suggerisce che:

se osservo una relazione ("correlazione") tra due variabili, la prima cosa che cerco di fare è di fornire un'interpretazione, ossia:

INTERPRETARE = DESCRIVERE UN FENOMENO ALLA LUCE DI UNA TEORIA

TEORIA: Formulazione logicamente coerente di un insieme di definizioni, principi e leggi generali che consente di descrivere, interpretare, classificare, spiegare fenomeni di varia natura

(*Encicl.Treccani:* http://www.treccani.it/enciclopedia/teoria/)

(In realtà le cose non sono così semplici, perché spesso è la teoria che mi guida nella ricerca di relazioni osservabili. In questo senso, non è necessariamente vero che l'osservazione è indipendente dalla teoria)

A sua volta, la teoria viene spesso (soprattutto nelle scienze "dure", ma anche in economia) tradotta in una serie di modelli:

MODELLO: Descrizione formale, spesso matematica, di una relazione tra variabili, ipotizzata in base ad una teoria. Spesso usato a fine di simulazione o predizione: ossia per rispondere a domande del tipo: "se aumenta x, cosa succederà a y?"

Osservazioni:

(i). Non c'è limite al **numero di variabili** le cui relazioni sono ipotizzate da una teoria e descritte da un modello.

(ii). La nozione di "causa" ("**x causa y**) deve sempre essere compresa "tenendo fermo tutto il resto del mondo".

Ossia, ad esempio, la frase "***il leone sbrana il bambino***" suggerisce una relazione di causalità.

Ma se io introduco un'altra variabile nel sistema, la relazione di causalità cambia radicalmente:

"***il leone sbrana il bambino che io avevo introdotto nella sua gabbia***"

Un esempio più rassicurante (economico):

"Sono aumentati sia i consumi che i risparmi"

Questa frase è di difficile interpretazione, ossia è difficile pensare ad qualche relazione causale diretta tra le due variabili. Se però la completo in questo modo, diventa più chiara:

"Dopo che il governo ha diminuito le imposte, sono aumentati sia i consumi che i risparmi"

(iii). Tradurremo spesso (anzi probabilmente sempre) le nostre teorie in **modelli lineari.**

L'ipotesi di linearità è una semplificazione utile, ma in certi casi è sicuramente inappropriata.

Ad esempio, sicuramente **non** potremmo utilizzarla per rappresentare relazioni come **C** o **D** proposte all'inizio.

2. Modelli lineari

$$Y = X$$

$$Y = \alpha X$$

$$Y = \alpha X + \beta$$

▶ Rappresentate in un grafico questi modelli, per α e γ positivi o negativi

Nota bene che:

- Scrivere una qualsiasi di queste relazioni non implica **alcuna** ipotesi di causalità tra di loro, ma è **compatibile** con diverse ipotesi di causalità.
- Esistono modi **diversi** ma del tutto **equivalenti** di riscrivere una stessa relazione.

  Prendendo in esame l'ultima, posso riscriverla come:

  $X = Y/\alpha - \beta/\alpha$ oppure : $\beta = Y - \alpha X$

- Una funzione lineare è caratterizzata da due "parametri":
  - **Intercetta** - convenzionalmente misurata rispetto all'asse verticale
  - **Pendenza** - convenzionalmente misurata rispetto all'asse orizzontale

Come si interpretano questi due parametri?

  - **ß** indica …
  - **α** indica …

3. Qualche "tecnicalità":

Variabili, tassi di variazione, prodotto e rapporto tra variabili, elasticità.

<u>Variabile</u>: **Y** .

- Singole osservazioni di **Y**: $\mathbf{Y_0 , Y_1 , Y_2 , Y_3 , \ldots , Y_n , \ldots Y_N}$.

*(**Y** può variare nel tempo e/o nello spazio)*

<u>Variazione</u> (di una variabile, tra due osservazioni successive)

$\mathbf{\Delta Y}$: $\Delta Y_1 = Y_1 - Y_0$; $\Delta Y_n = Y_n - Y_{n-1}$

- *Nota* : la pendenza di una funzione lineare (vedi sopra) è definita dal rapporto tra due variazioni:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = ß$$

Variazione percentuale (tasso di variazione):

$$\Delta Y/Y: \qquad \Delta Y_n/Y_{n-1} = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{Y_{n-1}} = \frac{Y_n}{Y_{n-1}} - 1$$

Esempio: (160-125)/125 **= 0,28 = 28%**

- *Nota*: il tasso d'inflazione **π** (riferito ad un qualsiasi indice dei prezzi) è la variazione percentuale dell'indice dei prezzi **P**:

$$\pi = \frac{\Delta P}{P}\ .$$

- *Nota*: vedi la sezione successiva per "come si calcola" il tasso di variazione.

Una curiosità importante:

$N \cdot (1+x)/(1+x) = N$

Moltiplicando e dividendo per una stessa percentuale x un numero N dato, il risultato è uguale ad N.

E invece: **$N \cdot (1+x) \cdot (1-x) < N$**

Dato un numero $N > 0$, aggiungendo una data percentuale x e poi sottraendo dal risultato la stessa percentuale (o viceversa, sottraendo o poi aggiungendo una stessa percentuale) si ottiene un numero inferiore ad N.

Prodotto tra due variabili: **$Y \cdot K$**

- Variazione di un prodotto:

$$\Delta(Y \cdot K) = \Delta Y \cdot K + \Delta K \cdot Y$$

- Variazione percentuale di un prodotto:

$$\Delta(Y \cdot K)/(Y \cdot K) = \frac{\Delta(YK)}{YK} = \frac{\Delta Y \cdot K + \Delta K \cdot Y}{YK} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta K}{K}$$

E' la **somma** delle variazioni percentuali dei due fattori!

Rapporto tra due variabili: **Y/X**

- Variazione di un rapporto:

$$\Delta(Y/X) = \frac{\Delta Y \cdot X - \Delta X \cdot Y}{X^2}$$

- Variazione percentuale di un rapporto:

$$\Delta(Y/X)/(Y/X) = \frac{\Delta(\frac{Y}{X})}{Y/X} = \frac{\Delta Y \cdot X - \Delta X \cdot Y}{(Y/X)X^2}$$

$$= \frac{\Delta Y \cdot X - \Delta X \cdot Y}{Y \cdot X} = \frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta K}{K}$$

E' la **differenza** tra la variazione percentuale del numeratore e del denominatore.

Elasticità (di Z rispetto a X):

Di quanto varia percentualmente Z, se X aumenta dell'1%?

Variaz. % di X	Variaz. % di Z	Elasticità (di Z risp.a X)
10%	15%	... ?
7%	- 3,5%	... ?
7%	14%	... ?
- 4%	4%	... ?
...	...	...

Elasticità è il **rapporto** tra le variazioni percentuali delle due variabili.

In generale:

$$\text{elasticità (z,x)} = \frac{\Delta Z}{Z} \bigg/ \frac{\Delta X}{X}$$

che si può indifferentemente scrivere come:

$$\text{elasticità (z,x)} = \frac{\Delta Z}{\Delta X} \bigg/ \frac{Z}{X} = \frac{\Delta Z}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Z}$$

4. Come si calcola il tasso di crescita di una variabile?

Di molte variabili economiche siamo interessati al tasso di crescita.

Il **tasso di crescita** di una variabile non è altro che il suo tasso di variazione, ovvero la variazione percentuale da un anno all'altro.

Ma come si calcola?

- Tasso di variazione uni-periodale

Sappiamo che la popolazione residente in Italia (al 1° gennaio) in due anni successivi è:

2000	2001
57.679.895	56.915.744

(fonte: ISTAT)

Il tasso di crescita nel corso del 2000 (ovvero: fra il 1 gennaio del 2000 e del 2001) è:

$$g = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{Y_{n-1}} = \frac{Y_n}{Y_{n-1}} - 1 = 0{,}0132 = 1{,}32\%$$

- ## Tasso di variazione medio nel corso di un periodo

2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
59.190.143	59.364.690	59.394.207	59.685.227	60.782.668	60.795.612	60.665.551	60.589.445	60.483.973	60.359.546	60.317.000

In questo caso abbiamo 11 osservazioni, dalle quali possiamo calcolare 10 tassi di crescita annuali.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	59.190.143	59.364.690	59.394.207	59.685.227	60.782.668	60.795.612	60.665.551	60.589.445	60.483.973	60.359.546	60.317.000
3		0,29%									

Su ***Excel***, questa operazione si può fare in un attimo:

- nella cella B3, scriviamo la formula: **=((B2/A2)-1)**,
- poi scegliamo l'opzione di formato: Numeri -> Percentuale .

  In questo modo, nella cella B3 appare il numero 0,29%.

- Infine copiamo il contenuto di questa cella in tutte le successive nella stessa riga, e nella riga 3 si visualizza la sequenza dei tassi di crescita (o decrescita) della popolazione:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	59.190.143	59.364.690	59.394.207	59.685.227	60.782.668	60.795.612	60.665.551	60.589.445	60.483.973	60.359.546	60.317.000
3		0,29%	0,05%	0,49%	1,84%	0,02%	-0,21%	-0,13%	-0,17%	-0,21%	-0,07%

Ma qual è il tasso di crescita **medio** della popolazione nel corso di tutto il periodo?

A questo punto, la cosa più semplice è calcolare la media dei tassi di crescita nella riga 3.

Per questo digito, in qualsiasi casella vuota: **=MEDIA(B3:K3)**

Ed in quella casella, magicamente, apparirà il numero cercato: **0,19%.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	MEDIA
2	59.190.143	59.364.690	59.394.207	59.685.227	60.782.668	60.795.612	60.665.551	60.589.445	60.483.973	60.359.546	60.317.000	
3		0,29%	0,05%	0,49%	1,84%	0,02%	-0,21%	-0,13%	-0,17%	-0,21%	-0,07%	0,19%

D'accordo, ma non c'è un modo per arrivare direttamente a calcolare questa media?

Certo che c'è, ed è semplicissimo.

In questo caso, basta conoscere il dato iniziale (2010) e quello finale (2020).

Poi, usiamo la formula del **tasso di interesse composto:**

$$\frac{pop_{2020}}{pop_{2010}} = (1+g)^{10}$$

Dove : g è il tasso di crescita medio nel periodo (ossia, la nostra incognita) e 10 è il numero dei periodi (anni) che intercorrono fra l'osservazione iniziale (pop_{2010}) e quella finale (pop_{2020}).

L'unico passaggio da fare è "**invertire**" questa espressione, ossia riscriverla in modo da isolare a sinistra la nostra incognita. Ovvero:

$$g = \left(\frac{pop_{2020}}{pop_{2010}}\right)^{1/10} - 1$$

Notiamo che elevare un numero alla potenza di **1/10** equivale ad estrarre la radice decima di quel numero.

Ora digitiamo questa formula in una cella qualsiasi. Nel nostro foglio, dovremo digitare:

=(K2/A2)^(1/10)-1

E di nuovo, “magicamente”, otteniamo: **0,19%**

Ma questa volta, notiamo una cosa importante:

- Per calcolare la media, abbiamo potuto trascurare tutti i valori intermedi della popolazione.
- È sufficiente conoscere il punto di partenza ed il punto di arrivo (e naturalmente il numero di anni che li separa): in questo modo, possiamo facilmente applicare la formula, anche con una calcolatrice tascabile!